Anzahl der Dominosteine in einer 3D-Pyramide

Tim Weißker

2. Dezember 2012

In diesem Dokument soll eine Formel zur Berechnung der benötigten Anzahl von Dominosteinen in einer dreidimensionalen $n \times n$-Pyramide bewiesen werden.

1 Behauptung

Eine dreidimensionale $n \times n$-Pyramide nach üblicher Bauart benötigt genau

$$D(n) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) - \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

Dominosteine $\forall n \geq 1$. Ausmultipliziert gilt es also, den folgenden Zusammenhang zu beweisen:

$$\begin{aligned}
D(n) &= \frac{1}{3} \cdot (2n^3 + 3n^2 + n) - \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n) \\
D(n) &= \frac{2}{3}n^3 + n^2 + \frac{1}{3}n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\
D(n) &= \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n
\end{aligned}$$

2 Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsanfang Sei nun $n = 1$. Eine 1×1-Pyramide besteht nur aus einem einzigen Dominostein, der gleichzeitig Boden und Spitze der Pyramide ist. Wir testen, ob die Formel diesen Zusammenhang erfüllt:

$$D(1) = \frac{2}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 1 \quad \checkmark$$

Induktionsschritt Auf Grund des Induktionsanfangs nehmen wir an, die Formel sei für eine $n \times n$-Pyramide korrekt (Induktionsvorraussetzung). Nun gilt es zu zeigen, dass in einer $(n+1) \times (n+1)$-Pyramide

$$\begin{aligned} D(n+1) &= \frac{2}{3}(n+1)^3 + \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{6}(n+1) \\ &= \frac{2}{3}n^3 + \frac{5}{2}n^2 + \frac{17}{6}n + 1 \end{aligned}$$

Dominosteine verbaut werden können.
Um von einer $n \times n$-Pyramide zu einer $(n+1) \times (n+1)$-Pyramide zu kommen, müssen unten an die Pyramide zwei weitere Dominosteinschichten angehängt werden. Die erste Schicht besteht dabei aus $n \cdot (n+1)$ Dominosteinen, die zweite Schicht aus $(n+1) \cdot (n+1)$ Dominosteinen.

$$\begin{aligned} D(n+1) &= D(n) + ((n \cdot (n+1)) + ((n+1) \cdot (n+1)) \\ &= D(n) + (n^2 + n) + (n^2 + 2n + 1) \\ &= D(n) + 2n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

Nach der Induktionsvorraussetzung können wir $D(n)$ durch die zu beweisende Formel ersetzen und erhalten:

$$\begin{aligned} D(n+1) &= \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n + 2n^2 + 3n + 1 \\ &= \frac{2}{3}n^3 + \frac{5}{2}n^2 + \frac{17}{6}n + 1 \end{aligned}$$

Dies entspricht genau der im Induktionsschritt zu beweisenden Formel für $D(n+1)$. Somit ist die Formel $\forall n \geq 1$ bewiesen. $\square$